قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

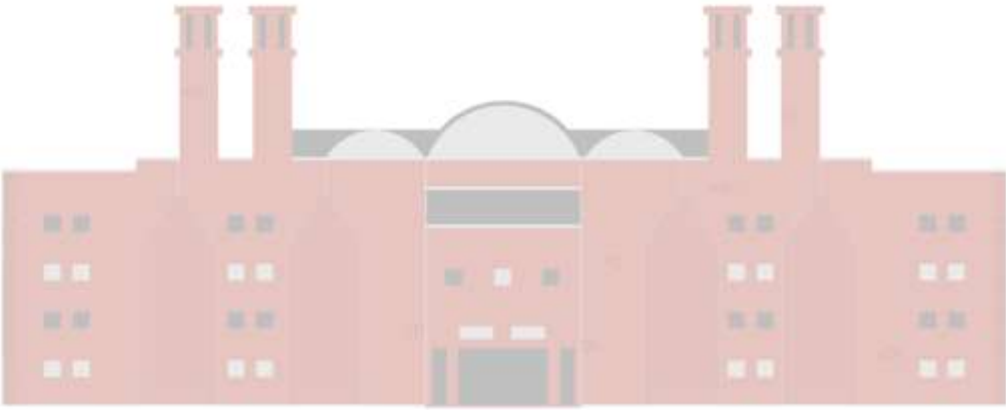
السنة الثانية / الفصل الأول

RED BUILDING TEAM

التحليل العددي

المحاضرة السادس عشر

7 صفحات



الدكتور: صالح ملحم

التاريخ: الأثنين ١٧ /٢٠١٤/١١
الخميس٢٠/١١/ ٢٠١٤

عملي

جلسة يوم الاثنين .

تتمة حل التمرين في محاضرة العملي السابقة :

$$g(x) = \ln\frac{1}{\cos x}$$

ان "g" معرف ومستمر على المجال $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ نقوم باختبار الشرط التالي .

$$\left.\begin{matrix} g(-o.5) = 0.13 \\ g(o.5) = 0.13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

اختبار الشرط الثالث.

$$\left.\begin{matrix} g'(x) = \tan x \Rightarrow |g'(0.5)| = |\tan(0.5)| = 0.54 \\ |g'(-0.5)| = 0.54 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0.54 < 1 \text{ محقق}$$

سوف نختار $(x_0 = -0.5) \Leftarrow x_1 = g(x_0) = \ln\frac{1}{\cos x} = 0.13$

$$x_2 = g(x_1) = 0.0086$$

$$x_3 = g(x_2) = 0.00004$$

مثال :

باستخدم طريقة النقطة الثابتة عين جذرا للمعادلة $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$

على المجال $[0,7]$ مع اختيار $x_0 = 0$ من اجل خمس تكرارات

ان "g" هي معرفة ومستمرة على $[0,7]$, $x = \sqrt{x+2} = g(x)$

تحقق الشرط الثاني $\Leftarrow$

$$\left.\begin{matrix} g(0) = \sqrt{2} \in [0,7] \\ g(7) = 3 \in [0,7] \end{matrix}\right\}$$

تحقق الشرط الثالث $\Leftarrow$

$$\left.\begin{matrix} g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \Rightarrow \left|g'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\right| = 0.35 < 1 \\ \left|g'(7) = \frac{1}{6}\right| = 0.16 < 1 \end{matrix}\right\}$$

اذن التابع يملك نقطة ثابتة

$$x_1 = g(0) = 1.4$$

$$x_2 = g(x_1) = 1.84775$$

$$x_3 = 1.96157$$

$$x_4 = 1.99636$$

$$x_5 = 1.99759$$

جلسة يوم الخميس

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

مستقيمات بمستوي يمكن التعبير عنها بمصفوفة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$* \quad A^{-1}A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نضرب ب A^{-1} نعوض بالمعادلة الأصلية

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [\quad]$$

الطرائق العددية لحل جمل المعادلات الخطية {Jacobi's Way}

نأخذ الأمثال بالقيمة المطلقة ← نأخذ أكبر الأمثال ← نعزلها ومن ثم نريد بناء علاقة تكرارية

(k) تكرار من المرتبة k $\qquad (k-1) \qquad (k-1)$

$$1)\ 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \Rightarrow x_1^{(k)} = \frac{13}{10} - \frac{2x_2^{(k-1)}}{10} - \frac{x_3^{(k-1)}}{10}$$

$$2)\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 13 \Rightarrow x_2^{(k)} = \frac{13}{10} - \frac{x_1^{(k-1)}}{10} - \frac{2x_3^{(k-1)}}{10}$$

$$2x_1 + x_2 + 10x_3 = 13 \Rightarrow x_3^{(k)} = \frac{13}{10} - \frac{2x_1^{(k-1)}}{10} - \frac{x_2^{(k-1)}}{10}$$

بدأنا من الحل : الصفر $\left(x_1^{(0)}, x_2,^{(0)} x_3^{(0)}\right) = (0,0,0)$ اذن أول تكرار $k = 1$

$$x_1^{(1)} = \frac{13}{10} - \frac{2x_2^{(0)}}{10} - \frac{x_3^{(0)}}{10} = 1.3$$

$$x_2^{(1)} = \frac{13}{10} - \frac{x_1^{(0)}}{10} - \frac{2x_3^{(0)}}{10} = 1.3$$

$$x_3^{(1)} = \frac{13}{10} - \frac{2x_1^{(0)}}{10} - \frac{x_2^{(0)}}{10} = 1.3$$

نختبر شرط التوقف لنعرف هل نكمل التكرار او لا ؟ $\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| < \varepsilon$

فإذا كان محقق نتوقف وأذا لم يتحقق نكمل

$k = 2$

$$x_1^{(2)} = \frac{13}{10} - \frac{2x_2^{(1)}}{10} - \frac{x_3^{(1)}}{10} = 0.91$$

$$x_2^{(2)} = \frac{13}{10} - \frac{x_1^{(1)}}{10} - \frac{2x_3^{(1)}}{10} = 0.91$$

$$x_3^{(2)} = \frac{13}{10} - \frac{2x_1^{(1)}}{10} - \frac{x_2^{(1)}}{10} = 0.91$$

$$k = 3$$

$$x_1^{(3)} = \frac{13}{10} - \frac{2x_2^{(2)}}{10} - \frac{x_3^{(2)}}{10} = 1.027$$

$$x_2^{(3)} = \frac{13}{10} - \frac{x_1^{(2)}}{10} - \frac{2x_3^{(2)}}{10} = 1.027$$

$$x_3^{(3)} = \frac{13}{10} - \frac{2x_1^{(2)}}{10} - \frac{x_2^{(2)}}{10} = 1.027$$

طريقة غاوس سايدل : "مفهوم حاسوبي "

قيم الطريقة السابقة :

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	1.3	1.3	1.3
2	0.91	0.91	0.91
3	1.027	1.027	1.027

قيم غاوس سايدل

$$k = 1$$

$$x_1^{(1)} = \frac{13}{10} - \frac{2x_2^{(0)}}{10} - \frac{x_3^{(0)}}{10} = 1.3$$

$$x_2^{(1)} = \frac{13}{10} - \frac{x_1^{(0)}}{10} - \frac{2x_3^{(0)}}{10} = 1.3 - \left(\frac{1.3}{10}\right) - 0 = 1.17$$

$$x_3^{(1)} = \frac{13}{10} - \frac{2x_1^{(0)}}{10} - \frac{x_2^{(0)}}{10} = 1.3 - 2\left(\frac{1.3}{10}\right) - \left(\frac{1.17}{10}\right) = 0.923$$

اختبار الدقة (أي الفرق بين القيمة والتي قبلها) فاذا كان الشرط محقق نتوقف وان لم يتحقق فنكمل

$$k = 2$$

$$x_1^{(2)} = \frac{13}{10} - \frac{2x_2^{(1)}}{10} - \frac{x_3^{(1)}}{10} = 1.3 - 2\left(\frac{1.17}{10}\right) - (0.923) = 0.976$$

$$x_2^{(2)} = \frac{13}{10} - \frac{x_1^{(1)}}{10} - \frac{2x_3^{(1)}}{10} = 1.3 - \left(\frac{0.976}{10}\right) - 2\left(\frac{0.923}{10}\right) = 1.017$$

$$x_3^{(2)} = \frac{13}{10} - \frac{2x_1^{(1)}}{10} - \frac{x_2^{(1)}}{10} = 1.3 - 2\left(\frac{0.976}{10}\right) - \frac{0.99}{10} = 1.0034$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	1.3	1.17	0.923
2	0.976	1.017	1.0034

ملاحظة: تسمى الطريقتين السابقتين بالطرائق التكرارية وتعتبر طريقة غاوس سايدل أسرع من طريقة جاكوبي بالوصول الى الجذر"أسرع أي تكرار أقل"

تذكرة سريعة بالنظيم $norm$:

$$f(x) = ||x||$$

- $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $||\delta x|| = |\delta| * ||x||$
- $||x \pm y|| \le ||x|| + ||y||$

تابع يحقق هذه الشروط ⇐ هو $norm$

نقول عن المجموعة $(M, \|\,.\,\|)$ أنها فضاء منظم .

فلتكن لدينا المصفوفة A حيث : $A \in Mnxn$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad , \qquad \|A\| = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}|a_{ij}|$$

$$\|A\| = 10$$

نرى إن كان الشرط يتحقق :

$$\|A\| = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}|a_{ij}| = 0$$

$$|a_{ij}| = 0$$

$$a_{ij} = 0 \Rightarrow A = 0$$

لتكن $AX = B$ جملة معادلات خطية بالشكل المصفوفي

من البعد $(n * n)$ تملك nمجهولاً نقصد بحل هذه الجملة هو تعيين قيم المصفوفة

$$x = \begin{bmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \{\text{الحل الحقيقي}\}$$

ولنفرض أننا أوجدنا حلاً حقيقيا لها وسمي المصفوفة x_c لنأخذ احدى الطرائق التكرارية لـ جاكوبي ، غاوس ، سايدل

عندئذ سيعطي حلاً تقريباً هو المصفوفة $x^{(k)}$ حيث k مرتبة التكرار

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} \qquad \{\text{الحل الحقيقي}\}$$

لنأخذ $(M, \|\,.\,\|)$ فضاء المصفوفات من البعد $(n * n)$ المنظم بالنظيم $\|\,.\,\|$ عندئذ نجد :

$$\lim_{k\to\infty}\|X_c - X^{(k)}\| = 0$$

ومن الشرط الأول في تعريف النظيم يكون :

$$X_c = X^{(k)}$$

$$k \to \infty$$

الفرق بين الإنسان الناجح والآّخرين ليس نقص القوة

أو نقص العلم

ولكن عادة نقص الإرادة ...

فينيس لومباردي